第6讲 一元二次方程根的判别式及应用

**知识梳理**

**1．一元二次方程根的判别式**

*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*叫做一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的根的判别式，通常用符号“\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_”来表示，记作\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

当Δ=*b*2-4*ac*\_\_\_\_\_\_\_\_0时，方程有两个不相等的实数根，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

；

当Δ=*b*2-4*ac*\_\_\_\_\_\_\_\_0时，方程有两个相等的实数根，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

当Δ=*b*2-4*ac*\_\_\_\_\_\_\_\_0时，方程没有实数根.

上述判断反过来说，也是正确的.即

当方程有两个不相等的实数根时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

当方程有两个相等的实数根时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

当方程没有实数根时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**2．一元二次方程根的判别式的应用**

(1)不解一元二次方程，判断根的情况；

(2)根据方程根的情况，确定待定系数的取值范围；

(3)二次三项式是完全平方式时，判断待定系数；

(4)根据方程根的情况，证明相关问题.

**典型解析**

**例1**：不解方程，判断下列关于*x*(或*y*)的方程的根的情况：

(1)5*x*2-4*x*-3=0； (2)3*x*2+2*x*+1=0； (3)4*x*2+4*x*+1=0；

(4)*y*2-2*my*+4(*m*-1)=0； (5)4*x*2+2*nx*+(*n*2-2*n*+5)=0； (6)*ax*2+*c*=0(*a*≠0).

**解：**(1)因为△=(-4)2-4×5×(-3)=76>0，所以原方程有两个不相等的实数根.

(2)因为△=22-4×3×1=-8<0，所以原方程无实数根.

(3)因为△=42-4×4×1=0，所以原方程有两个相等的实数根.

(4)因为Δ=4(*m*-2)2≥0，所以原方程有两个实数根.

当*m*=2时，原方程有两个相等的实数根；

当*m*≠2时，原方程有两个不相等的实数根.

所以原方程无实数根.

(6)因为△=-4*ac*，

所以当*c*=0时，△=0，原方程有两个相等的实数根；

当*a*、*c*异号时，△>0，原方程有两个不相等的实数根；

当*a*、*c*同号时，△<0，原方程无实数根.

**例2：**在关于*x*的一元二次方程4*x*2-(*k*+2)*x*+*k*=1中，*k*为何值时，方程有两个相等的实数根？并求出这两个实数根.

**解：**原方程化为4*x*2-(*k*+2)*x*+*k*-1=0，则

△=(*k*+2)2-4×4×(*k*-1)=*k*2-12*k*+20.

当△=*k*2-12*k*+20=0，即*k*=10或*k*=2时，原方程有两个相等的实数根

**例3：**已知关于*x*的方程(*m*-1)*x*2+2*mx*+*m*-2=0有实数根，求*m*的取值范围.

根据题意，得①当*m*-1=0，即*m*=1时，原方程为

②当*m*-1≠0，即*m*≠1时，有

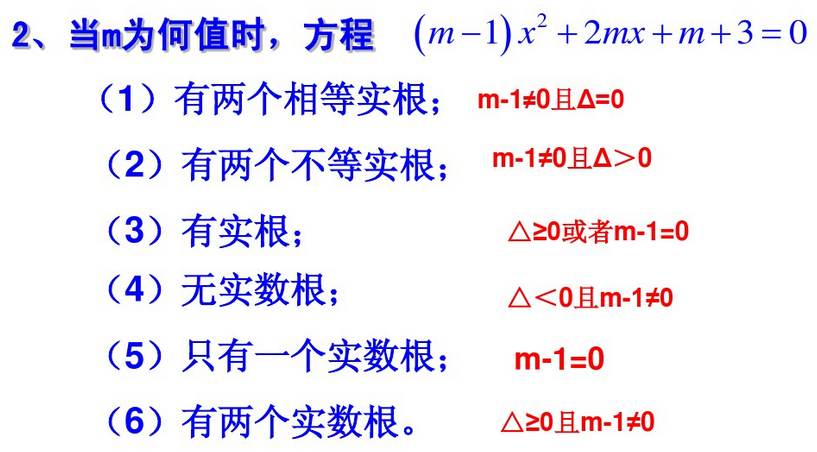
Δ=*b*2-4*ac*=(2*m*)2-4(*m*-1)(*m*-2)=4*m*2-4*m*2+12*m*-8=12*m*-8.

因为方程有实根，所以12*m*-8≥0，解得

所以*m*的取值范围是

解后反思

这里需要特别注意“根的判别式”是一元二次方程才有的，所以在使用它之前必须先要确定此方程为一元二次方程.一般情况下，若方程中含未知数最高项的系数是含有字母的代数式时，则需要根据具体条件进行分类讨论，从而确定方程的类型.方程为一元一次方程时，求出相应的根即可说明其有实根.



**例4：**设*m*为自然数，且3<*m*<40，方程*x*2-2(2*m*-3)*x*+4*m*2-14*m*+8=0有两个整数根，求*m*的值及方程的根.

Δ=4(2*m*+1) 3<*m*<40 7<2*m*+1<81

2*m*+1可以为9，25，49， *m*可以为4，12，24

①*m*=4 *x*1=2，*x*2=8；②*m*=12 *x*1=26，*x*2=16；③*m*=24 *x*1=52，*x*2=38

**例5：**若关于*x*的代数式(2*m*-1)*x*2+2(*m*+1)*x*+4是完全平方式，求*m*的值.

解：令(2*m*-1)*x*2+2(*m*+1)*x*+4=0.

Δ=[2(*m*+1)]2-4(2*m*-1)×4=4*m*2+8*m*+4-32*m*+16=4*m*2-24*m*+20.

所以4*m*2-24*m*+20=0，即*m*2-6*m*+5=0，

解得*m*1=1，*m*2=5.

所以当*m*=1或*m*=5时，代数式是完全平方式.

**例6：**如果关于*x*的方程*mx*2-2(*m*+2)*x*+*m*+5=0没有实数根，试判断关于*x*的方程(*m*-5)*x*2-2(*m*-1)*x*+*m*=0的根的情况.

规范解答

当*m*=0时，方程*mx*2-2(*m*+2)*x*+*m*+5=0即为-4*x*+5=0，有实根，不符合题意，所以*m*≠0.

因为一元二次方程*mx*2-2(*m*+2)*x*+*m*+5=0没有实数根，

所以Δ1=[-2(*m*+2)]2-4*m*(*m*+5)=4(4-*m*)<0，所以*m*>4.

对于方程(*m*-5)*x*2-2(*m*-1)*x*+*m*=0，

当*m*=5时，方程变为-8*x*+5=0，有一个实根；

当*m*≠5时，Δ2=[-2(*m*-1)]2-4*m*(*m*-5)=4(3*m*+1)，

因为*m*>4，所以4(3*m*+1)＞52，

所以Δ2>0.故方程有两个不相等的实根.

综上所述，当*m*=5时，方程有一个实根；当*m*>4且*m*≠5时方程有两个不相等的实根.

解后反思

这类题目的特点是出现了两个含有共同字母系数的方程，在解决问题时，只要考虑根的判别式即可.此类题目综合考查了一元二次方程根的判别式的正用和逆用.通过根的判别式与0的大小关系，可以确定方程根的情况；在已知根的情况下，判断根的判别式与0的大小关系，从而可求得其中字母系数的取值.在具体解决此类问题的过程中，要分清判别式与0的大小关系是直接由已知可得还是需要具体证明的，不要本末倒置.同时，在解题中还要特别关注方程中含未知数最高项的系数是否含有字母，若含有字母，则必须分类讨论.

**例7：**已知关于*x*的一元二次方程无实数根，化简.

**例8：**若*a*，*b*，*c*为实数，关于*x*的方程有两个相等的实数根，求证：*a*+*c*=2*b*.

**例9：**已知*a*，*b*，*c*是△*ABC*的三条边，关于*x*的一元二次方程有两个相等的实数根.求证△*ABC*为等腰三角形.

**同步训练**

1.不解方程判别下列方程根的情况：

(1)3*x*2-25*x*+10=0；

(3)16*x*2+9=24*x*，

(5)*x*2+2*x*-3=0；

答案：(1)有两个不相等的实数根；(2)没有实数根；(3)有两个相等的实数根；(4)有两个不相等的实数根；(5)有两个不相等的实数根；(6)有两个不相等的实数根

2.关于*x*的方程*k*2*x*2+(2*k*+1)*x*+1=0有实数根，求*k*的取值范围.

解：根据题意得

①当*k*2=0，即*k*=0时，原方程为*x*+1=0，*x*=-1；

②当*k*2≠0，即*k*≠0时，有Δ=*b*2-4*ac*=(2*k*+1)2-4*k*2=4*k*2+4*k*+1-4*k*2=4*k*+1.

因为方程有实根，所以4*k*+1≥0，解得

所以*k*的取值范围是

3.当12<*m*<40时，关于*x*的一元二次方程*x*2-2(2*m*-3)*x*+4*m*2-14*m*+8=0有两个整数根，求整数*m*的值.

解：解关于*x*的一元二次方程*x*2-2(2*m*-3)*x*+4*m*2-14*m*+8=0，得

Δ=4(2*m*-3)2-4(4*m*2-14*m*+8)=8*m*+4=4(2*m*+1)，

因为方程有两个整数根，所以4(2*m*+1)是完全平方数，即2*m*+1是完全平方数.

又因为*m*是整数且12<*m*<40，所以当*m*=24时，2*m*+1才为完全平方数.

将*m*=24代入解方程得*x*1=52，*x*2=38，符合题意.

所以当*m*=24时方程有两个整数根.

4.已知多项式*x*2-(2*k*-3)*x*+2是一个完全平方式，那么*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

师：面对这样的题目，我们可以通过一元二次方程的根的判别式的方法来解

设*x*2-(2*k*-3)*x*+2=0，∵完全平方式 ∴方程有两个相等的实数根 ∴Δ=0

Δ=4*k*2-12*k*+1=0 *k*=±

5.证明：无论实数*m*、*n*取何值，方程*mx*2+(*m*+*n*)*x*+*n*=0都有实数根.

答案：证明：(1)若*m*=0，则方程*nx*+*n*=0.当*n*≠0时，有实数根*x*=-1；当*n*=0时，方程的根为任意实数.

所以当*m*=0时，无论*n*为任何实数，方程都有实数根.

(2)当*m*≠0时，原方程为一元二次方程，

因为Δ=(*m*+*n*)2-4*mn*=(*m*-*n*)2≥0，

所以方程必有实数根，

综合(1)(2)可知，无论*m*、*n*取何值，方程都有实数根.

6.已知*a*，*b*，*c*是三角形的三边长，求证：关于*x*的一元二次方程无实数根.

**走进中考**

1．(2017·上海中考)下列方程中，没有实数根的是( )

(A)*x*2-2*x*=0； (B)*x*2-2*x*-1=0； (C)*x*2-2*x*+1=0； (D)*x*2-2*x*+2=0.

答案：D

2.(2016·上海中考)如果关于*x*的方程有两个相等的实数根，那么实数*k*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

3.(2015·上海中考)如果关于*x*的一元二次方程*x*2＋4*x*－*m*＝0没有实数根，那么*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

4.(2014·上海中考)如果关于*x*的方程*x*2－2*x*＋*k*＝0(*k*为常数)有两个不相等的实数根，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

**三角形复习**

1．*P*是∠*BAC*平分线*AD*上一点，*AC*>*AB*，求证：*PC*-*PB*<*AC*-*AB*.

*P*

*D*

*A*

*C*

*B*

在*AC*上取点*E*，

使*AE*＝*AB*.

∵*AE*＝*AB*

*AP*＝*AP*

∠*EAP*＝∠*BAE*，

∴△*EAP*≌△*BAP*

∴*PE*＝*PB*.

*PC*＜*EC*＋*PE*

∴*PC*＜（*AC*－*AE*）＋*PB*

∴*PC*－*PB*＜*AC*－*AB*.

2．已知∠*ABC*=3∠*C*，∠1=∠2，*BE*⊥*AE*，求证：*AC*-*AB*=2*BE*.



证明：在*AC*上取一点*D*，使得角*DBC*=角*C*

∵∠*ABC*=3∠*C*

∴∠*ABD*=∠*ABC*-∠*DBC*=3∠*C*-∠*C*=2∠*C*；

∵∠*ADB*=∠*C*+∠*DBC*=2∠*C*;

∴*AB*=*AD*

∴*AC* – *AB* =*AC*-*AD*=*CD*=*BD*

在等腰三角形*ABD*中，*AE*是角*BAD*的角平分线，

∴*AE*垂直*BD*

∵*BE*⊥*AE*

∴点*E*一定在直线*BD*上，

在等腰三角形*ABD*中，*AB*=*AD*，*AE*垂直*BD*

∴点*E*也是*BD*的中点

∴*BD*=2*BE*

∵*BD*=*CD*=*AC*-*AB*

∴*AC*-*AB*=2*BE*